# Теория узлов и инвариант Кассона в артиновской теории представлений

**ДЖ. С. КЭЛКАТ**
*Университет штата Техас,*
*Остин, США*
e-mail: jack@math.utexas.edu

УДК 515.162.8+512.543.1

**Ключевые слова:** 3-многообразие, 4-многообразие, инварианты Кассона, теория узлов.

**Аннотация**

В артиновской теории копредставлений определяется гладкое компактное 4-многообразие по заданию фундаментальной группы его края. Топологические инварианты как 3-, так и 4-многообразий должны подсчитываться как функции только дискретного артиновского представления. Гонсалес-Акунья дал такую формулу для инварианта Рохлина целочисленной гомологической 3-сферы. Настоящая статья предлагает формулу для инварианта Кассона рациональной гомологической сферы. Тем самым все трёхмерные инварианты Зейберга—Виттена могут быть сосчитаны теоретико-групповым способом в артиновской теории. Инвариант Кассона тесно связан с каноническими узлами, определёнными по представлению Артина. Мы также показываем, что любой узел в любом 3-многообразии оказывается каноническим узлом в теории представлений Артина. Открытой проблемой остаётся определение четырёхмерных инвариантов Зейберга—Виттена и Дональдсона в этой теории.

**Abstract**

*J. S. Calcut, Knot theory and the Casson invariant in Artin presentation theory*, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 11 (2005), no. 4, pp. 119—126.

In Artin presentation theory, a smooth, compact four-manifold is determined by a certain type of presentation of the fundamental group of its boundary. Topological invariants of both three- and four-manifolds can be calculated solely in terms of functions of the discrete Artin presentation. González-Acuña proposed such a formula for the Rokhlin invariant of an integral homology three-sphere. This paper provides a formula for the Casson invariant of rational homology spheres. Thus, all 3D Seiberg—Witten invariants can be calculated by using methods of theory of groups in Artin presentation theory. The Casson invariant is closely related to canonical knots determined by an Artin presentation. It is also shown that any knot in any three-manifold appears as a canonical knot in Artin presentation theory. An open problem is to determine 4D Seiberg—Witten and Donaldson invariants in Artin presentation theory.

## 1. Введение

Артиновская теория представлений есть изучение некоторых конечных групповых представлений, тесно связанных с гладкими компактными односвязными

*Фундаментальная и прикладная математика*, 2005, том 11, № 4, с. 119—126.

4-многообразиями, замкнутыми ориентируемыми 3-многообразиями и лежащими в них узлами и зацеплениями [4, 15].

По определению артиновское представление $r$ есть конечное представление

$$r = \langle x_1, \ldots, x_n \mid r_1, \ldots, r_n \rangle,$$

удовлетворяющее следующему уравнению в $F_n$ (свободной группе от $x_1, \ldots, x_n$):

$$x_1 x_2 \ldots x_n = (r_1^{-1} x_1 r_1)(r_2^{-1} x_2 r_2) \ldots (r_n^{-1} x_n r_n).$$

Артиновское представление $r$ определяет гладкое компактное связное односвязное 4-многообразие $W^4(r)$ с краем $M^3(r)$ — замкнутым ориентируемым 3-многообразием. Фундаментальная группа $M^3(r)$ изоморфна $\pi(r)$, группе с представлением $r$, и так возникают все замкнутые ориентируемые 3-многообразия (см. далее раздел 2). Таким образом, артиновские представления характеризуют фундаментальные группы замкнутых ориентируемых 3-многообразий (этот результат получен Гонсалес-Акуньей в [7]).

Важная тема в артиновской теории представлений состоит в том, что инварианты 3- и 4-многообразий должны вычисляться теоретико-групповыми методами единственно по дискретному артиновскому представлению $r$. Для рохлинского инварианта целочисленной гомологической сферы $M^3(r)$ это было сделано в [7]. Для простоты допустим, что $r$ есть артиновское представление, для которого матрица сумм показателей $A(r)$ является тождественной. (Вопрос, имеет ли каждая целочисленная гомологическая 3-сфера артиновское представление, для которого $A(r) = I$, открыт. Аналог этого для разложений Хегора верен.) Ассоциированное представление

$$\langle x_1, \ldots, x_n \mid x_1 r_1 = r_1 x_2,\ x_2 r_2 = r_2 x_3, \ldots,\ x_{n-1} r_{n-1} = r_{n-1} x_n \rangle$$

после коммутирования становится $\mathbb{Z}$ и потому имеет многочлен Александера $\Delta$. Положим $d = \Delta(-1)$. Тогда

$$\mu(M^3(r)) = \frac{d^2 - 1}{8} \bmod 2.$$

Главная задача этой статьи — дать такую формулу для инварианта Кассона любой рациональной гомологической 3-сферы. Допустим снова для простоты, что $r$ есть артиновское представление с матрицей $A(r) = I$. Для $i = 1, \ldots, n$ пусть $H_i$ — ассоциированное представление

$$H_i = \langle x_1, \ldots, x_n \mid r_1, \ldots, r_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n \rangle.$$

Пусть $\Delta_i$ обозначает конвеевский нормализованный многочлен Александера группы с представлением $H_i$ (т. е. $\Delta_i(1) = 1$ и $\Delta_i(t) = \Delta_i(t^{-1})$). Тогда

$$\lambda(M^3(r)) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \Delta_i''(1).$$

Вспомним, что $\Delta_i$ может быть посчитан теоретико-групповым образом по представлению $H_i$ ($H_i$ есть функция от $r$) с помощью свободного исчисления Фокса и алгебраической компьютерной системы, такой как MAGMA. Общая формула, где $M^3(r)$ есть рациональная гомологическая 3-сфера, получена в разделе 3.

**Замечание.** Простые примеры показывают, что $\lambda$ не есть просто целое $(d^2-1)/8$ из вышеприведённой формулы Гонсалес-Акуньи.

Это показывает, что все трёхмерные инварианты Зейберга—Виттена могут быть посчитаны теоретико-групповым способом в рамках артиновской теории представлений согласно результату Лима [11]. Открытой проблемой остаётся нахождение аналога теории Флоера в артиновской теории представлений. Читателю следует вспомнить, что инвариант Кассона есть эйлерова характеристика гомологических групп Флоера.

Неизвестно, какие 4-многообразия возникают в артиновской теории представлений. Например, неизвестно, каждое ли гладкое компактное связное односвязное 4-многообразие со связной и односвязной границей есть $W^4(r)$ (о проблеме, связанной с этой, см. [6, с. 344]). Для многих интересных 4-многообразий это так, например для всех эллиптических поверхностей $E(n)$, в частности для поверхности Куммера $K3 = E(2)$ (см. [4]). Таким образом, существует нетривиальная теория Дональдсона и Зейберга—Виттена в артиновской теории представлений. Интересный вопрос: как можно посчитать гладкие инварианты 4-многообразия $W^4(r)$ только по артиновскому представлению $r$? Кажется естественным полагать, что каноническая теория узлов в артиновской теории представлений, которая находится в тесной связи с инвариантной формулой Кассона, и планарность страницы в конструкции открытой книги будут существенными в этом вопросе. Вспомним, что уже выявлены связи между многочленами Александера узлов и гладкими инвариантами [5, 12].

**Замечание.** В некоторых специальных случаях инвариант Кассона был получен иным способом с помощью перестройки на замкнутых крашеных 3-косах [1].

## 2. Узлы и зацепления

Основы артиновской теории представлений появились в [15], а также в [4] и [3]. Некоторые из этих результатов напоминаются здесь для удобства.

Множество артиновских представлений от $n$ образующих обозначается $\mathcal{R}_n$ и составляет группу, канонически изоморфную $P_n \times \mathbb{Z}^n$, где $P_n$ — это классическая группа крашеных кос с $n$ нитями. Таким образом, артиновское представление $r \in \mathcal{R}_n$ определяет $h(r)$ — гомеоморфизм на себя компактного 2-диска с $n$ дырами $\Omega_n$, тождественный на $\partial\Omega_n$ и единственный с точностью до изотопии $\operatorname{rel}\partial\Omega_n$. Применяя конструкцию открытой книги к $h(r)$ с плоской страницей $\Omega_n$, мы получаем $M^3(r)$ — замкнутое связное ориентируемое 3-многообразие. Фундаментальная группа $M^3(r)$ изоморфна $\pi(r)$, группе с представлением $r$.

Артиновское представление $r$ определяет также гладкое компактное связное односвязное 4-многообразие $W^4(r)$ с краем $\partial W^4(r) = M^3(r)$. Многообразие

$W^4(r)$ может быть построено двумя эквивалентными способами, либо обобщением конструкции открытой книги [15], либо добавлением 2-ручек к 4-диску, согласно замыканию крашеной косы, которую определяет $r$ [4].

Пусть $A(r)$ обозначает матрицу сумм показателей для $r$, т. е. $[A(r)]_{ij}$ равно показателю при $x_j$ в прокоммутированном $r_i$. Матрица $A(r)$ есть целочисленная $(n \times n)$-матрица, которая представляет $H_1(M^3(r); \mathbb{Z})$. Для артиновского представления $r$ матрица $A(r)$ симметрична и задаёт квадратичную форму многообразия $W^4(r)$. Значит, целочисленные гомологии как $M^3(r)$, так и $W^4(r)$ просто задаются матрицей $A(r)$. В частности, $M^3(r)$ является рациональной гомологической 3-сферой, если и только если $\det A(r) \neq 0$, и это целочисленная гомологическая сфера, если и только если $\det A(r) = \pm 1$.

Теория узлов и зацеплений в артиновской теории представлений является одновременно канонической и достаточно общей. Пусть $r = \langle x_1, \ldots, x_n \mid r_1, \ldots, r_n \rangle$ — артиновское представление в $\mathcal{R}_n$. Край плоской страницы $\Omega_n$ в конструкции открытой книги для $M^3(r)$ определяет $n+1$ различных узлов $k_0, k_1, \ldots, k_n$ в $M^3(r)$. Группы узлов $G_i$ узлов $k_i = k_i(r)$ задаются, согласно [15, с. 226, 227] и [4, § 2.1], путём

$$G_0 = \langle x_1, \ldots, x_n \mid r_1 = r_2 = \ldots = r_n \rangle,$$
$$G_i = \langle x_1, \ldots, x_n \mid r_1, r_2, \ldots, r_{i-1}, r_{i+1}, \ldots, r_n \rangle, \quad i \neq 0.$$

Хотя мы это и не используем здесь, если $M^3(r)$ — целочисленная гомологическая 3-сфера, то периферические структуры этих узлов определяются матрицей $A(r)^{-1}$ [15].

Следующий неопубликованный результат Гонсалес-Акуньи показывает, что теория узлов в артиновской теории представлений достаточно обща. Взяв в нём в качестве $L$ пустое зацепление, мы вернёмся к результату Гонсалес-Акуньи [7], что каждое замкнутое связное ориентируемое 3-многообразие гомеоморфно $M^3(r)$ для некоторого артиновского представления $r$.

**Теорема.** *Пусть $L$ — зацепление в замкнутом связном ориентируемом 3-многообразии $M^3$. Тогда $(M^3, L)$ гомеоморфно $(M^3(r), K)$ для некоторого артиновского представления $r$, где $K$ есть подзацепление $k_1, \ldots, k_m$ из края $\Omega_n$.*

**Доказательство.** Пусть $l_1, \ldots, l_m$ — компоненты $L$. Пусть $Y$ — подмножество $M^3$, полученое из трубчатой окрестности $T(L)$ зацепления $L$ связыванием каждой компоненты $T(L)$ с дизъюнктным 3-диском $D^3 \subset M^3 - T(L)$ посредством вложенной 1-ручки. Подмножество $Y$ гомеоморфно стандартному ориентируемому кренделю $H_m$ рода $m$. Прикрепляя конечное число 1-ручек к $D^3$ в $M^3$ (дизъюнктных от $Y - D^3$), мы получим такое подмножество $Z \subset M^3$, что $Z$ гомеоморфно $H_g$, $g \geqslant m$, и также $W = M^3 - \operatorname{int} Z$ гомеоморфно другой копии $H'_g$ стандартного кренделя; это следует из морсовской теории ручек [6, глава 4].

Согласно Ликоришу [8, 9], группа гомеотопии края $\partial H_g$ порождена деновскими скручиваниями вдоль простых кривых $a_1, \ldots, a_g$, $b_1, \ldots, b_g$ и $c_1, \ldots, c_{g-1}$ в $\partial H_g$, где все $a_i$ не стягиваемы в $H_g$. Тогда $Z$ гомеоморфно $H_g$, стандартно вложенному в $\mathbb{R}^3$, так что $l_i$ параллельно $a_i$ по указанной конструкции. Более того, $M^3$ гомеоморфно $H_g \cup_f H_g'$ при гомеоморфизме $f$, который изотопен произведению конечного числа скручиваний Дена $De_1, \ldots, De_k$, где каждое $e_i$ — это одна из кривых $a_1, \ldots, a_g$, $b_1, \ldots, b_g$, $c_1, \ldots, c_{g-1}$ (см. [9]). Можно допустить, что $e_i = a_i$ для $i = 1, 2, \ldots, m$, так как если выполнить скручивания $Da_1, \ldots, Da_m$, $Da_1^{-1}, \ldots, Da_m^{-1}$ и затем $De_1, \ldots, De_k$, результирующий гомеоморфизм $\partial H_g$ будет изотопен $f$.

Как показал Ликориш [8], каждое деновское скручивание $Dx$ может быть выполнено $\pm 1$ перестройкой на узле внутри $H_g$, параллельном $x$. Пусть $s_i$ есть узел внутри $H_g$, который параллелен $a_i$ для $i = 1, \ldots, m$, так что $l_i$ есть параллель $s_i$, которая не зацеплена с $s_i$. Так как $s_i$ имеет оснащение $\pm 1$, можно провести $l_i$ по $s_i$ изотопией так, что $l_i$ станет меридианом $s_i$. Каждое из остающихся скручиваний предоставляет узел для перестройки; они все дизъюнктны, и каждый дизъюнктен с окрестностью каждой $s_i$, которая содержит $l_i$ в качестве меридиана. Пусть $\beta$ — объединение всех узлов, по которым проводятся перестройки (включая $s_i$). Из [10, с. 418, 419] или [13, с. 279, 340, 341] следует, что $\beta$ изотопна замыканию крашеной косы. Из этого следует результат, поскольку каждая компонента $l_i$ зацепления $L$ является меридианом некоторой компоненты $\beta$. □

Имеются и другие полезные группы узлов, ассоциированные с артиновскими представлениями.

Зафиксируем $r \in \mathcal{R}_n$. Пусть $\beta = \beta(r)$ обозначает оснащённую крашеную косу, которую определяет $r$. Для $i = 1, \ldots, n$ пусть $\beta_i$ обозначает $i$-ю компоненту $\beta$ с оснащением $a_i = [A(r)]_{ii}$. Пусть $M^3(\beta_1, \ldots, \beta_k)$ есть замкнутое, ориентируемое 3-многообразие, полученное перестройкой на замыкании первых $k$ компонент $\beta$. Заметим, что, выполняя $j$-редукцию (см. [3, 15]) на $r$ для $j = k+1, k+2, \ldots, n$, мы получим артиновское представление $s$, такое что $M^3(s)$ гомеоморфно $M^3(\beta_1, \ldots, \beta_k)$. Заметим также, что замыкание $\beta_k$ есть узел в $M^3(\beta_1, \ldots, \beta_{k-1})$, группа которого имеет представление

$$H_i = \langle x_1, \ldots, x_n \mid r_1, \ldots, r_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n \rangle.$$

Это следует из конструкции HNN (см. [15, с. 247]).

Обе группы узлов $G_i$ и $H_i$ будут использоваться в следующем разделе.

# 3. Инвариант Кассона

Формула, описанная здесь для инварианта Кассона рациональной гомологической 3-сферы в артиновской теории представлений, имеет простейший вид в случае, когда $A(r)$ есть унимодулярная диагональная матрица.

Пусть $r \in \mathcal{R}_n$ — артиновское представление, для которого $A(r)$ — диагональная матрица $[A(r)]_{ii} = \varepsilon_i = \pm 1$. Заметим, что $M^3(r)$ есть целочисленная гомологическая 3-сфера. Пусть $\Delta_i$ обозначает для $i = 1, \ldots, n$ конвеевский нормализованный многочлен Александера представления $H_i$, описанный выше.

**Теорема.** $\lambda(M^3(r)) = \frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n} \varepsilon_i \Delta_i''(1)$.

Результат вытекает из сказанного в конце предыдущего раздела и из [2]. Общий случай, когда $\det A(r) \neq 0$, подобен, но более техничен. Заметим, что всегда $\Delta_1 = 1$ (каждая компонента замкнуой крашеной косы незаузленна), и сумму нужно брать только при $i = 2, \ldots, n$.

**Определение.** Пусть $A$ есть целочисленная матрица размера $n \times n$. Пусть $A_{1\ldots k}$ обозначает верхний левый $(k \times k)$-минор в $A$. Тогда $A$ допустима, если $\det A_{1\ldots k} \neq 0$ при всех $k = 1, \ldots, n$.

Пусть $r \in \mathcal{R}_n$ — артиновское представление и $1 \leqslant k \leqslant n$. Тогда $A(r)_{1\ldots k}$ есть матрица представления для $H_1(M^3(\beta_1, \ldots, \beta_k); \mathbb{Z})$. Если $A(r)$ допустима, то $M^3(\beta_1, \ldots, \beta_k)$ есть рациональная гомологическая 3-сфера для $k = 1, \ldots, n$ (в частности, $M^3(r)$ есть рациональная гомологическая 3-сфера). Поэтому $M^3(r)$ можно получить последовательностью перестроек на $\beta_1, \ldots, \beta_n$, и на каждом шаге мы будем иметь рациональную гомологическую 3-сферу. Это показывает, что понятие допустимости согласуется с тем, которое дано в [14, с. 96].

**Теорема.** *Если $A(r)$ для $r \in R_n$ допустима, тогда*

$$\lambda(M^3(r)) = w_0 + \sum_{i=1}^{n} w_i \Delta_i''(1),$$

*где веса $w_j$ рациональны и определены матрицей $A(r)$.*

Результат вытекает из сказанного выше и из [14, с. 95, 96]. Заметим, что гомологические данные в формуле Уолкера строго зависят только от $A(r)$, и можно запрограммировать компьютер для вычисления этих величин.

Остаётся определить инвариант Кассона артиновского представления $r \in \mathcal{R}_n$, для которого $\det A(r) \neq 0$ и $A(r)$ не допустима. Одна процедура сведения к случаю допустимости была описана Уолкером в [14, с. 105, 106], хотя его метод имеет недостатки. Во-первых, он нарушает свойство косы быть крашеной и тем самым выходит за рамки артиновской теории представлений. Во-вторых, он излишне сложен и неконструктивен. Ниже предлагается простой и конструктивный метод редукции к допустимому случаю.

Пусть $D$ обозначает диагональную $(n \times n)$-матрицу, в которой каждый диагональный элемент $d_i$ принадлежит множеству $\{-1, 0, 1\}$.

**Утверждение.** *Пусть $A$ есть целочисленная матрица размера $n \times n$ и $\det A \neq 0$. Тогда при некотором выборе $D$ матрица $A + D$ допустима и $\det(A + D_{1\ldots k}) \neq 0$ для $k = 1, \ldots, n$.*

**Доказательство.** Если $A$ допустима, положим $D = 0$. Иначе мы даём конструктивный способ выбора $D$. Выберем $d_1$ так, чтобы $\det(A_{1\ldots 1} + D_{1\ldots 1}) \neq 0$ и $\det(A + D_{1\ldots 1}) \neq 0$. Разложение этих определителей даёт два линейных уравнения на $d_1$, которое не должно исчезать (первое с ненулевым непостоянным коэффициентом и второе с ненулевым постоянным коэффициентом), и мы имеем три возможных значения для $d_1$, так что всегда возможно его выбрать.

Когда $d_1, \ldots, d_{k-1}$ выбраны, выберем $d_k$ так, что $\det(A_{1\ldots k} + D_{1\ldots k}) \neq 0$ и $\det(A + D_{1\ldots k}) \neq 0$. Снова разложение этих двух определителей даёт два линейных уравнения на $d_k$, которое не должно исчезать (первое с ненулевым непостоянным коэффициентом и второе с ненулевым постоянным коэффициентом), и выбор всегда возможен. Выбрав таким путём $D$, мы получим искомое. □

Наконец, пусть $r \in \mathcal{R}_n$ — такое артиновское представление, что $\det A(r) \neq 0$ и $A(r)$ не допустимо. Пусть $D$ — матрица, выбранная согласно предыдущему утверждению, применённому к $A(r)$. $M^3(r)$ имеет диаграмму перестроек, задаваемую замыканием крашеной косы $\beta$. При каждом $i = 1, \ldots, n$, если $d_i \neq 0$, введём меридиан для $\beta_i$ с оснащением $\infty$ в диаграмме перестроек $M^3(r)$. Это не изменяет 3-многообразия; заметим, что меридианом для $\beta_i$ служит на деле $k_i = k_i(r)$ (это важно!). Теперь выполним скручивание по Рольфзену ([13, с. 264—267] или см. [6, с. 162, 163]) в правильном направлении ($+$ или $-$ в зависимости от $d_i$), которое просто изменяет оснащение в диаграмме: оснащение $a_i = [A(r)]_{ii}$ для $\beta_i$ становится $a_i + d_i$, а оснащение $\infty$ для $k_i$ становится $d_i$. Мы получим $M^3(r)$ с помощью перестроек (в этом порядке) $\beta_1, \ldots, \beta_n$ с новыми оснащениями и затем $k_n, \ldots, k_1$ с оснащениями $d_i$ (здесь $k_i$, для которых $d_i = 0$, пропускаются). Тогда, согласно выбору $D$, как в утверждении, мы имеем на каждой стадии рациональную гомологическую 3-сферу. Более того, каждая из групп узлов в этом ряду последовательных перестроек есть либо $G_i$, либо $H_i$ и, значит, определена через $r$. Инвариант Кассона $M^3(r)$ считается теперь с помощью многочленов Александера представлений $G_i$ и $H_i$ подобно допустимому случаю, и все требуемые гомологические данные предоставляются матрицами $A(r)$ и $D$.

## Литература

[1] Armas-Sanabria L. The $\mu$ invariant and the Casson invariant of 3-manifolds obtained by surgery on closed pure 3-braids // J. Knot Theory Ramifications. — 2004. — Vol. 13, no. 3. — P. 427—440.

[2] Akbulut S., McCarthy J. Casson's Invariant for Oriented Homology 3-Spheres. — Princeton Univ. Press, 1990. — (Math. Notes; Vol. 36).

[3] Calcut J. S. Torelli Actions and Smooth Structures on 4-Manifolds. — Ph.D. Thesis. — University of Maryland, 2004.

[4] Calcut J. S., Winkelnkemper H. E. Artin presentations of complex surfaces. — Accepted at Bol. Soc. Mat. Mexicana (volume dedicated to F. González-Acuña).

[5] Fintushel R., Stern R. Knots, links, and 4-manifolds // Invent. Math. — 1998. — Vol. 134, no. 2. — P. 363—400.

[6] Gompf R., Stipsicz A. 4-Manifolds and Kirby Calculus. — Amer. Math. Soc., 1999. — (Grad. Stud. Math.; Vol. 20).

[7] González-Acuña F. Open Books. — University of Iowa, 1975. — (Lect. Notes).

[8] Lickorish W. A representation of orientable combinatorial 3-manifolds // Ann. Math. — 1962. — Vol. 76, no. 3. — P. 531—540.

[9] Lickorish W. A finite set of generators for the homeotopy group of a 2-manifold // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. — 1964. — Vol. 60. — P. 769—778.

[10] Lickorish W. A foliation for 3-manifolds // Ann. Math. — 1965. — Vol. 82. — P. 414—420.

[11] Lim Y. The equivalence of Seiberg—Witten and Casson invariants for homology 3-spheres // Math. Res. Lett. — 1999. — Vol. 6. — P. 631—643.

[12] Meng G., Taubes C. H. $\underline{\mathrm{SW}}$ = Milnor torsion // Math. Res. Lett. — 1996. — Vol. 3, no. 5. — P. 661—674.

[13] Rolfsen D. Knots and Links. — Berkeley: Publish or Perish, 1976.

[14] Walker K. An Extension of Casson's Invariant. — Princeton Univ. Press, 1992. — (Ann. Math. Stud.; Vol. 126).

[15] Winkelnkemper H. E. Artin presentations. I: Gauge theory, $3+1$ TQFTs and the braid groups // J. Knot Theory Ramifications. — 2002. — Vol. 11, no. 2. — P. 223—275.