Über den höheren Zusammenhang kompakter Räume und eine Klasse von zusammenhangstreuen Abbildungen.

Von

L. Vietoris in Wien.

Den Begriff der eindeutigen stetigen Abbildung einer Menge K auf eine andere R kann man schrittweise einengen, indem man fordert, daß das Gesamturbild, d. i. die Menge aller Urbilder jedes Punktes von R zusammenhängend, daß sie einfach zusammenhängend sein soll, daß sie die 0-te, 1-te, 2-te, ..., n-te Zusammenhangszahl (in verschiedenen genau anzugebenden Bedeutungen) gleich 0 hat. Wir werden unter anderen weitergehenden Sätzen zeigen, daß diese Abbildungen, auf kompakte abgeschlossene Mengen angewendet, die 0-te, 1-te, 2-te, ..., n-te Zusammenhangszahl ungeändert lassen, bzw. die $(n+1)$-te nicht erhöhen [1]).

Dazu wollen wir zuerst die topologischen Begriffe, deren Verhalten gegenüber diesen besonderen stetigen Abbildungen wir betrachten werden, auf dem Boden der kombinatorischen Topologie genau gefaßt zusammenstellen, dann in die Topologie der Punktmengen übertragen und schließlich unsere Sätze ableiten. Wenn wir anfangs vielfach Bekanntes darstellen, so geschieht das, um angesichts der noch nicht gefestigten Ter-

---

[1]) Diese Untersuchungen gehen von einer mündlichen Bemerkung Brouwers aus, daß diese Invarianz, die ich in meiner Abhandlung „Über stetige Abbildungen einer Kugelfläche" (Proc. Amsterdam **29** (1926), S. 443—453) für die dort definierte Henkelzahl und $n=0$ beweise, auch für die von ihm (Math. Annalen **72**, S. 422—425) eingeführte Vielfachheit der Basis der Zyklosis gilt.

Daß die Voraussetzungen über die Gesamturbilder zur Erzwingung der Invarianz der 0-ten bis n-ten Zusammenhangszahl naturgemäß sind, sieht man unmittelbar in jenen Fällen, wo eine Menge auf einen einzigen Punkt abgebildet wird. Daß die $(n+1)$-te Zusammenhangszahl größer werden kann, wenn die genannten Voraussetzungen nicht völlig erfüllt sind, sieht man, wenn man eine Kreisscheibe eindeutig stetig so auf eine Kugel abbildet, daß dem Randkreis a) ein (mit Ausnahme der Endpunkte) doppelt gelegter Bogen, b) ein Punkt entspricht, und die Abbildung sonst eineindeutig ist.

minologie den nachfolgenden Ausführungen die nötige Eindeutigkeit zu geben uud den absolut kombinatorischen Standpunkt, von dem wir ausgehen und der gerade für das Gelingen der Übertragung in die Punktmengenlehre entscheidend ist, scharf zu betonen.

I. Kombinatorische Grundlage.

Wir verstehen unter einem n-dimensionalen Simplex S^n eine Menge von $(n+1)$-Punkten im Verein mit den $\binom{n+1}{2}$ Punktepaaren, $\binom{n+1}{3}$ Punktetripeln, ... und schließlich dem einen Punkte-$(n+1)$-tupel, welche man aus ihnen bilden kann. Jedes aus einem Teil der Punkte eines Simplex gebildete k-dimensionale Simplex heiße eine k-dimensionale Seite desselben; für $k = 0, 1$ verwenden wir wie üblich die Namen Ecke und Kante.

Unter einem (*simplizialen*) *Komplex* verstehen wir eine *endliche* Menge von Simplizes (Teilsimplizes), von denen keines eine Seite eines anderen ist, im Verein mit allen Seiten dieser Simplizes. Dabei lassen wir auch zu, daß die Teilsimplizes mit Vielfachheiten behaftet auftreten. Ein Komplex heißt n-dimensional, wenn die Dimension seines höchstdimensionalen Teilsimpexes n ist; er heißt homogen n-dimensional, wenn alle Teilsimplizes die Dimension n haben.

Der Komplex aller $(n-1)$-dimensionalen Seiten eines n-dimensionalen Simplexes heißt der *Rand* desselben.

Der Komplex aller jener $(k-1)$-dimensionalen Simplexe eines homogenen k-dimensionalen Komplexes C, welche Seiten einer ungeraden Anzahl von Teilsimplexen von C sind, heißt der *Rand* desselben.

Ein homogen n-dimensionaler Komplex ohne Rand heißt ein *n-dimensionaler Zykel.*

Unter der Summe zweier Komplexe K_1, K_2 verstehen wir die Menge aller Teilsimplizes von K_1 und von K_2, jeden so oft gerechnet, als er in K_1 und K_2 zusammengenommen vorkommt. Wir schreiben die Kongruenz $K_1 = K_2 \pmod 2$, wenn K_1 und K_2 dieselben Teilsimplizes haben und deren Vielfachheiten *modulo* 2 übereinstimmen.

Sind $C_1, C_2, \ldots, C_k$ k n-dimensionale homogene Komplexe mit den Rändern $R_1, R_2, \ldots, R_k$, die alle oder zum Teil auch leer sein können, so besteht zufolge der Definition des Randes zwischen dem Rand $R(C_1 + C_2 + \ldots + C_k)$ und den Rändern $R(C_1), R(C_2), \ldots, R(C_k)$ die Beziehung

$$R(C_1 + C_2 + \ldots + C_k) = R(C_1) + R(C_2) + \ldots + R(C_k) \bmod 2.$$

Ist $K_1 = K_2 \pmod 2$, so sind K_1 und K_2 zugleich Zykel oder keine Zykel. Sind K_1 und K_2 Zykel, so ist auch $K_1 + K_2$ und jeder damit *modulo* 2 kongruente Komplex ein Zykel. Weil nun der Rand jedes n-dimensionalen Simplexes ein $(n-1)$-dimensionaler Zykel ist, hat daher jeder homogen n-dimensionale Komplex einen $(n-1)$-dimensionalen Zykel als Rand. Dabei rechnen wir den leeren Komplex als Zykel beliebiger Dimension.

Umgekehrt ist jeder n-dimensionale Zykel C *modulo* 2 gleich dem Rand eines homogen $(n+1)$-dimensionalen Komplexes K. Man erhält ein solches K als den Komplex jener $(n+1)$-dimensionalen Simplexe, welche einen festgewählten (unter den Ecken von C vorkommenden oder nicht vorkommenden) Punkt p mit allen p nicht als Ecke habenden n-dimensionalen Seiten von C verbinden.

Ist $R^{(k-1)}$ der Rand einer Seite $S^{(k)}$ (k-dimensionaler Simplex) des Komplexes C, dann schreiben wir $R^{(k-1)} \sim 0$ in C (homolog 0 in C), wobei der Zusatz in C, wenn er selbstverständlich ist, auch weggelassen werden kann. Ferner soll für irgendwelche Komplexe D_1, D_2 aus ‚$D_1 \sim 0$ in C und $D_2 \sim 0$ in C‘ auch ‚$D_1 + D_2 \sim 0$ in C‘ folgen und außerdem aus ‚$K_1 = K_2 \bmod 2$ und $K_1 \sim 0$‘ auch $K_2 \sim 0$. Für $K_1 + K_2 \sim 0$ schreiben wir auch $K_1 \sim K_2$.

Wir betrachten nun für $K_1 \sim K_2$ die Operationen „$+K_1$“ und „$+K_2$“ als dieselbe Operation. Die Gruppe aller Additionen von n-dimensionalen in einem Komplex K gelegenen Zyklen ist kommutativ und endlich und möge die n-te *Zusammenhangsgruppe* heißen. Jedes ihrer Elemente hat die Ordnung 2.

Gibt es nun in einem Komplex C s k-dimensionale Zykel $C_1, C_2, \ldots, C_s$, zwischen denen keine Homologie $\alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 + \ldots + \alpha_s C_s \sim 0$ in C besteht, während zwischen mehr als s derartigen Zyklen eine solche immer besteht, dann nennen wir s die k-te *Zusammenhangszahl* von C.[2])

Erklärt man als Zykel nullter Dimension jede gerade Anzahl von Punkten, zwischen denen keine Kanten, Flächen, ... definiert sind, so ist die 0-te Zusammenhangszahl die Komponentenzahl vermindert um 1.

Poincaré[3]) verwendet in seinen Homologien *orientierte* Zykel. Um sie zu erhalten, ersetzen wir in unserer Definition des Komplexes die (nicht

---

[2]) Diese Zusammenhangszahlen sind, abgesehen davon, daß wir sie um 1 kleiner nehmen, genau die von O. Veblen [An application of modular equations in analysis situs. Am. Trans. **14** (1912), S. 86–94], O. Veblen und J. W. Alexander [Manifolds of n dimensions. Am. Trans. **14**, S. 163–178], O. Veblen [Analysis situs. Cambridge Colloquium 1916] eingeführten. Wir haben nur die Definition derselben von der Darstellung durch Matrizes losgelöst. Sie können als die genaue Fassung der von Riemann, Fragment aus der Analysis Situs. Werke, S. 479–482 eingeführten Zusammenhangszahlen gelten.

[3]) Analysis situs. Journ. Ec. Pol. (2) **1** (1895) und Compl. 1. Rendiconti Palermo **13** (1899), S. 285–343.

orientierten) Simplizes durch *orientierte* Simplizes, wo wieder ein Komplex einen Simplex beliebig oft in der einen Orientierung und zugleich beliebig oft in der andern Orientierung enthalten darf. (Derselbe Simplex in zwei verschiedenen Orientierungen gilt als zwei verschiedene Simplexe.) Der Summenkomplex $K_1 + K_2$ enthält jeden orientierten Simplex so oft als Teilsimplex, als er in K_1 und K_2 zusammen als Teilsimplex vorkommt. Als Rand eines orientierten n-dimensionalen Simplex $[a_1, a_2, \ldots, a_{n+1}]$ verstehen wir den Komplex der orientierten $(n-1)$-dimensionalen Simplexe $[a_2, a_3, \ldots, a_{n+1}]$, $[a_3, a_4, \ldots, a_{n+1}, a_1]$, …, $[a_1, a_2, \ldots, a_n]$. Aus der Festsetzung, daß $[a_1 a_2]$ und $[a_2 a_1]$ einander entgegengesetzt orientiert sind, folgt dann, daß $[a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n+1}]$ und $[a_2, a_1, a_3, \ldots, a_{n+1}]$ entgegengesetzte Orientierungen haben. Als Rand eines homogenen n-dimensionalen Komplexes K erklären wir jenen $(n-1)$-dimensionalen Komplex, der jede $(n-1)$-dimensionale Seite von K genau $(p-q)$-fach enthält, wenn diese dem Rand von p n-dimensionalen Seiten von K in ihrer eigenen, q n-dimensionalen Seiten von K in der entgegengesetzten Orientierung angehört. Wieder wird der Rand $R^{(k-1)}$ eines in einem Komplex C liegenden Simplexes als homolog 0 erklärt ($R^{(k-1)} \sim 0$ in C) und ebenso alles, was daraus durch Summenbildung entsteht. Schließlich heißt K_1 mit K_2 auch homolog, wenn für jeden Simplex die Vielfachheit, mit der er in K_1 positiv orientiert, vermindert um die Vielfachheit, mit der er in K_1 negativ vorkommt, gleich der entsprechenden Zahl bezüglich K_2 ist.

Die Gruppe der Additionen orientierter in C gelegener k-dimensionaler Zykel heiße die k-te *Homologiegruppe* von C. Dabei gelten „$+K_1$“ und „$+K_2$“ als dasselbe Element der Gruppe, wenn $K_1 \sim K_2$ ist. Die Maximalzahl bezüglich dieser Homologien linear unabhängiger k-dimensionaler Zykel in C, vermehrt um 1, definiert Poincaré als k-te Bettische Zahl von C. Die k-ten *Torsionszahlen* [4]) Poincarés sind die *Poincaréschen Zahlen* [5]) der k-ten Homologiegruppe.

Der Fundamentalgruppe liegt der Begriff der Wegaddition zugrunde. Dabei bedeutet, so lange wir von Komplexen reden, „Weg von a nach b“ soviel wie „Streckenzug von a nach b“. Ein geschlossener Weg heißt äquivalent 0 in C, wenn er entweder ganz in einer (simplizialen) Seite von C liegt oder Summe von lauter derartigen Wegen ist. Ferner soll jeder Weg $A + B + C + \ldots + K$ durch Weglassen irgendwelcher mit 0 äquivalenter Summanden in einen äquivalenten Weg übergehen [6]).

---

[4]) Compl. 2. Proc. Lond. Math. Soc. **32** (1901), S. 277–308; Compl. 5. Rend. Pal. **18** (1904), S. 45–110.

[5]) Im Sinn von Tietze, Monatsh. f. Math. Phys. **19** (1908), S. 62.

[6]) Diese Festsetzungen kommen darauf hinaus, zwei Wege A, B mit denselben Anfangs- und Endpunkten als äquivalent in C anzusehen, wenn es in C einen orien-

Ist nun o ein fester Punkt in C, so bilden die Additionen aller Wege in C von o nach o eine Gruppe; sehen wir die Additionen äquivalenter Wege als dieselbe Operation der Gruppe an, so erhalten wir die *Fundamentalgruppe* von C. Sie ist, wenn C zusammenhängend ist, von der Wahl des Punktes o unabhängig.

II. Übertragung auf beliebige kompakte Räume.

Wir sagen, ein Komplex C liege in einer Menge M, wenn seine Ecken in M liegen. Ob in M z. B. zu jeder Kante $[a\,b]$ von C, die ja nur als Punktepaar erklärt ist, eine stetige Verbindung zwischen a und b besteht oder nicht, ist uns dabei gleichgültig[7]).

Ist S der Rand eines Simplex beliebiger Dimension, dessen Kanten $< \varepsilon$ sind, dann schreiben wir $S \underset{\varepsilon}{\sim} 0$. Ein in M liegender Zykel C heiße *in M ε-homolog* 0, $C \underset{\varepsilon}{\sim} 0$ in M, wenn er mit einer Summe von lauter in M liegenden Simplexrändern mit Durchmessern $< \varepsilon$ im obigen kombinatorischen Sinn homolog ist. Dabei verstehen wir diese Homologie für nicht orientierte Zykel *modulo* 2, für orientierte Zykel im Sinne der Homologien Poincarés.

Die Addition des Randes $R^{(k)}$ eines $(k+1)$-dimensionalen Simplexes zu einem k-dimensionalen Zykel $C^{(k)}$ heiße eine *ε-Abänderung* von $C^{(k)}$, wenn $R^{(k)} \underset{\varepsilon}{\sim} 0$ ist[8]). Wir schreiben für $C_1^{(k)} - C_2^{(k)} \underset{\varepsilon}{\sim} 0$ auch $C_1^{(k)} \underset{\varepsilon}{\sim} C_2^{(k)}$.

Wir nennen die unendliche Folge F von k-dimensionalen Zyklen $C_1, C_2, \ldots$ eine *Fundamentalfolge* in M, wenn die Kantenlänge von C_m mit wachsendem m gegen 0 konvergiert und es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein n_ε gibt, so daß $C_{n_1} \underset{\varepsilon}{\sim} C_{n_2}$ in M ist[9]), sobald $n_1 > n_\varepsilon$ und $n_2 > n_\varepsilon$ gilt. Die Fundamentalfolge F heiße ε-homolog 0, wenn es ein n_ε gibt, so daß $C_n \underset{\varepsilon}{\sim} 0$ für $n > n_\varepsilon$ gilt. F heiße eine *Nullfolge*, $F \sim 0$, wenn $F \underset{\varepsilon}{\sim} 0$ für jedes ε gilt.

Sind $\{C_i\}$ und $\{D_j\}$ Fundamentalfolgen, so ist $\{C_i + D_i\}$ wieder eine Fundamentalfolge. Wir erklären sie als die Summe $\{C_i\} + \{D_j\}$. Ist $\{C_i\} \sim 0$ und $\{D_j\} \sim 0$, so ist auch $\{C_i\} + \{D_j\} \sim 0$. Wir erklären

---

tierten, *einfach* zusammenhängenden Komplex gibt, dessen Rand $B - A$ ist. Poincaré verlangt (Analysis situs, S. 62) bloß, daß $B - A \sim 0$ in C sei, was zu wenig ist und in Widerspruch zu seinem sonstigen Text steht.

[7]) Denselben Standpunkt nimmt P. Alexandroff (Zur Begründung der n-dimensionalen mengentheoretischen Topologie, Math. Annalen **94**, S. 296–308) ein.

[8]) Dieser Begriff der ε-Abänderung ist für Zykel analog, für Wege (siehe weiter unten) übereinstimmend mit dem von Brouwer a. a. O. gegebenen.

[9]) Dabei verstehen wir die Zeichen $\sim$ und $+$ für nicht orientierte Zykel *modulo* 2.

$\{C_i\} \underset{\varepsilon}{\sim} \{D_j\}$, wenn $\{C_i\} - \{D_j\} \underset{\varepsilon}{\sim} 0$ ist und $\{C_i\} \sim \{D_j\}$, wenn $\{C_i\} - \{D_j\} \sim 0$ ist.

Die Gruppen dieser beiden Additionen mögen die k-te Zusammenhangsgruppe, bzw. die k-te Homologiegruppe von M heißen.

In derselben Weise erklären wir die Fundamentalgruppe von M. Wir übernehmen von den Komplexen die Wegaddition, wobei wir hier anstatt der gewöhnlich betrachteten kontinuierlichen Wege die obigen diskontinuierlichen Wege verwenden. Nun heiße ein geschlossener Weg $\underset{\varepsilon}{\equiv} 0$, wenn er ganz einem Simplex angehört, dessen Kanten $< \varepsilon$ sind. Dann erklären wir analog zu den Fundamentalfolgen von Zyklen Fundamentalfolgen von Wegen, die Addition dieser Fundamentalfolgen und die Äquivalenzen zwischen ihnen. Schließlich nehmen wir in M einen festen Punkt o an und erhalten in der Gruppe der Additionen von Fundamentalfolgen von geschlossenen Wegen, die o als Anfangs- und Endpunkt haben, die Fundamentalgruppe von M bezüglich o. Daß sie von der Wahl des Punktes o auch dann nicht unabhängig zu sein braucht, wenn M ein Kontinuum ist, zeigt das folgende Beispiel [9a]).

Wir denken uns im Einheitsquadrat auf der unteren Seite die bekannte nirgends dichte perfekte Menge Cantors, sie heiße C, eingetragen und in jedem ihrer Punkte das Lot von der Länge 1 errichtet. Nun identifizieren wir den unteren Endpunkt $(x, 0)$ jeder solchen Strecke mit dem oberen Endpunkt $(f(x), 1)$ einer andern dieser Strecken, wobei $f(x)$ auf C folgendermaßen definiert ist (wir schreiben triadisch):

$$\begin{array}{llll}
\text{Für} & 0 \leqq x \leqq 0{,}1 & \text{sei } f(x) = x + 0{,}2 & \\
\text{„} & 0{,}2 \leqq x \leqq 0{,}21 & \text{„}\ f(x) = x + 0{,}12 & -1 \\
\text{„} & 0{,}22 \leqq x \leqq 0{,}221 & \text{„}\ f(x) = x + 0{,}012 & -1 \\
\text{„} & 0{,}222 \leqq x \leqq 0{,}2221 & \text{„}\ f(x) = x + 0{,}0012 & -1 \ \text{usw.}
\end{array}$$

ferner sei $f(1) = 0$.[10])

$f(x)$ ist eineindeutig und umkehrbar stetig in C. Durch die Identifizierung entsteht aus C ein (unzerlegbares) Kontinuum K. Als Abstand zweier identifizierter Punkte gilt nun 0, während sonst als Abstand zweier Punkte a, b von K das auf Grund dieser Festsetzung bestimmte $\min(\overline{a x_1} + \overline{x_1 x_2} + \ldots + \overline{x_n b})$ für beliebig viele Punkte x_i aus K erklärt sei. In K gibt es zu jedem ε (eindimensionale) ε-Zykel, die nicht ε-homolog

---

[9a]) Dieses Beispiel überschlägt der Leser zunächst am besten, um im Zusammenhang nicht gestört zu werden.

[10]) In Worten läßt sich dies so ausdrücken: Wir identifizieren die linke Hälfte der Menge der unteren Endpunkte gleichsinnig kongruent mit der „rechten oberen Hälfte". Dann von den übrigbleibenden Endpunktmengen wieder die linke untere Hälfte gleichmäßig kongruent mit der rechten oberen usw.

0 sind. Je kleiner aber ε ist, desto öfter muß der Zykel in K „herumlaufen“. Weil wir von den Zykeln einer Fundamentalfolge verlangen, daß ihre Kantenlänge gegen 0 konvergiert und zwei hinreichend feine orientierte Zykel, die verschieden oft herumlaufen, voneinander einen Abstand $> \frac{1}{3}$ haben, gibt es daher in K außer Nullfolgen überhaupt keine Fundamentalfolgen von orientierten eindimensionalen Zyklen; d. h. die Homologiegruppe von K enthält nur die Einheit. Dasselbe gilt auch für die Fundamentalgruppe bezüglich jedes Punktes o von K. Wenn wir aber zu K noch einen mit K sonst fremden Bogen von $(0,0)$ nach $(0,1)$ hinzufügen, so hat die Fundamentalgruppe des so entstandenen Kontinuums K^* bezüglich $(0,0)$ eine einfache Basis, die Fundamentalgruppe bezüglich des Punktes $(1,1)$ eine 0-fache Basis.

Die Fundamentalgruppe eines kompakten Kontinuums K ist aber sicher dann vom Anfangspunkt o unabhängig, wenn es zu irgend zwei Punkten a, b aus K eine Fundamentalfolge $F(a, b)$ von a mit b verbindenden (kombinatorischen) Wegen gibt. Ordnet man nämlich jedem Element X der Fundamentalgruppe $\mathfrak{G}_a$ von K bezüglich a das Element $-F(ab)+X+F(ab)$ von $\mathfrak{G}_b$ zu und umgekehrt jedem Element $F(ab)-Y-F(ab)$ von $\mathfrak{G}_a$ zu, so erhält man eine eineindeutige Zuordnung von $\mathfrak{G}_a$ auf $\mathfrak{G}_b$, welche die Gruppenrelationen von $\mathfrak{G}_a$ in die von $\mathfrak{G}_b$ überführt.

Insbesondere ist die Fundamentalgruppe in jenen kompakten Kontinuen vom Anfangspunkt unabhängig, in denen irgend zwei Punkte durch einen Bogen verbindbar sind, unter anderem also in im Kleinen zusammenhängenden kompakten Kontinuen.

Im allgemeinen Fall unterscheiden wir mehrere (auch unendlich viele) Fundamentalgruppen.

Man sieht auf Grund der gleichmäßigen Stetigkeit der topologischen Abbildungen in kompakten Räumen leicht ein, daß die Zusammenhangs-, Homologie- und Fundamentalgruppen kompakter Kontinua topologische Invarianten sind[11]).

Der in III zu beweisende Satz (8b) geht übrigens bezüglich der Zusammenhangs- und Homologiegruppen viel weiter.

(1) Die Zusammenhangs-, Homologie- und Fundamentalgruppen einer beliebigen Menge eines metrischen Raumes können als vollständige[12]) metrische Räume aufgefaßt werden. Man hat nur als Abstand zweier Fundamentalfolgen $F_1 = \{C_1, C_2, \ldots\}$ und $F_2 = \{D_1, D_2, \ldots\}$ die untere Grenze aller Zahlen $\varrho > 0$ zu erklären, für welche $F_1 \underset{\varrho}{\sim} F_2$ gilt, d. h. für welche bei

[11]) Diese Invarianz gilt in nicht kompakten abgeschlossenen Mengen nicht.

[12]) Hausdorff, Grundzüge, S. 315.

hinreichend großem i $C_i \underset{\varrho}{\sim} D_i$ ist. Für die Fundamentalgruppen haben wir „$\equiv$" statt „$\sim$" zu schreiben.

Entsprechend der Endlichkeit der Zusammenhangsgruppe in Komplexen gilt hier:

(2) *Die n-te Zusammenhangsgruppe einer kompakten abgeschlossenen Menge M ist für jedes n kompakt und abgeschlossen.*

Zum Beweis zeigen wir zunächst:

(3) *In einer kompakten abgeschlossenen Menge M gibt es zu einem festen n und vorgegebenem ε nur endlich viele paarweise nicht ε-homologe nicht orientierte n-dimensionale $\frac{\varepsilon}{3}$-Zykel.*

Wir wollen nicht behaupten, daß in (3) das $\frac{\varepsilon}{3}$ durch keinen größeren Bruchteil von ε ersetzbar ist.

Um (3) einzusehen, wählen wir in M eine endliche Menge A von Punkten a, so daß jeder Punkt von M von mindestens einem a einen Abstand $< \frac{\varepsilon}{3}$ hat. Nun sei C ein beliebiger nicht orientierter n-dimensionaler $\frac{\varepsilon}{3}$-Zykel in M. Sind nicht alle Ecken von C Punkte von A, so wählen wir zu einem Punkt c von $C - A$ einen Punkt $a$von A, der von c einen Abstand $< \frac{\varepsilon}{3}$ hat. Sind $S_1, S_2, \ldots, S_k$ die in c zusammenstoßenden n-dimensionalen Seiten von C, so seien $R_1, R_2, \ldots, R_k$ die Ränder der $(n+1)$-dimensionalen Simplizes, welche a als eine Ecke und $S_1, S_2, \ldots, S_k$ als gegenüberliegende Seiten haben. Bilden wir $C + R_1 + R_2 + \ldots + R_k$ und lassen wir daraus $S_1, S_2, \ldots, S_k$, die sowohl als Seiten von C als auch von $R_1, R_2, \ldots, R_k$ vorkommen, je zweimal weg, dann erhalten wir einen mit C ε-homologen Zykel C_1. Die Kanten von C_1 sind, soweit sie ungeändert geblieben sind, $< \frac{\varepsilon}{3}$, während die von a ausgehenden neuen Kanten von C_1, welche an die Stelle der von c ausgehenden Kanten getreten sind, $< \frac{2\varepsilon}{3}$ sind. Sind nun nicht alle Ecken von C_1 Punkte von A, so ändern wir C_1 analog ab usw. Dabei wird eine Kante von C höchstens zweimal abgeändert, weil sie nur zwei Endpunkte hat. Nach der ersten Änderung ist sie noch $< \frac{2\varepsilon}{3}$, nach der zweiten $< \varepsilon$. D. h. die Änderungen, welche wir an $C, C_1, \ldots$ nacheinander vornehmen, sind immer ε-Abänderungen, m. a. W. die hinzuaddierten R_k haben lauter Durchmsser $< \varepsilon$, und wir gelangen schließlich zu einem Zykel $C^* \underset{\varepsilon}{\sim} C$, dessen sämtliche Ecken in A liegen. Solcher Zykel gibt es aber nur endlich viele, womit (3) gezeigt ist. Aus (3) gewinnen wir leicht:

(4) *In einer kompakten abgeschlossenen Menge M gibt es zu einem festen n und vorgegebenem $\varepsilon > 0$ nur endlich viele, paarweise nicht ε-homologe Fundamentalfolgen von nicht orientierten n-dimensionalen Zyklen.*

Denn in jeder Fundamentalfolge sind von einem gewissen Element an alle folgenden untereinander ε-homolog.

Es ist nur eine andere Art, (4) auszudrücken, wenn wir sagen:

(4) Die n-te Zusammenhangsgruppe einer kompakten abgeschlossenen Menge ist für jedes n total beschränkt[13]).

Da ein total beschränkter vollständiger Raum kompakt ist[14]), ergibt sich aus (1) und (4) unmittelbar (2).

Für die Homologie- und die Fundamenalgruppen gelten die zu (2), (3), (4) analogen Sätze nicht, entsprechend der Tatsache, daß diese Gruppen in Komplexen im allgemeinen von unendlicher Ordnung sind. Dagegen kann man noch die folgenden Sätze (3′), (4′), (3″), (4″) behaupten.

(3′) *Ist M eine kompakte abgeschlossene Menge, so gibt es zu einem festen n und vorgegebenem $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl s, so daß zwischen irgend s in M liegenden n-dimensionalen orientierten $\frac{\varepsilon}{3}$-Zyklen $C_1, C_2, \ldots, C_s$ eine ε-Homologie $\alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 + \ldots + \alpha_s C_s \underset{\varepsilon}{\sim} 0$ besteht.*

Der Beweis verläuft wie der von (3). Man hat nur C als orientiert vorauszusetzen und die Abänderungen mit Hilfe von orientierten Simplexrändern R_i vorzunehmen. Dann ist C^* ein orientierter Zykel und es gilt wieder $C^* \underset{\varepsilon}{\sim} C$. Da A eine endliche Punktmenge ist, gibt es das behauptete s für A und damit auch für M.

Aus (3′) folgt sofort (4′).

(4′) *Ist M eine kompakte abgeschlossene Menge, so gibt es zu einem festen n und vorgegebenem $\varepsilon > 0$ ein s, so daß zwischen irgend s Fundamentalfolgen von orientierten in M liegenden n-dimensionalen Zyklen eine ε-Homologie besteht.*

Einfacher, weil nur für Wege (im obigen kombinatorischen Sinn), also *ein*dimensionale Komplexe, sonst aber völlig analog verläuft der Beweis von (3″) und (4″).

(3″) *Ist o ein beliebiger Punkt einer kompakten abgeschlossenen Menge M, so gibt es zu einem vorgegebenen $\varepsilon > 0$ eine endliche Anzahl s von $\frac{\varepsilon}{3}$-Wegen $W_1, W_2, \ldots, W_s$, die alle von o nach o führen, so daß jeder in M von o nach o führende $\frac{\varepsilon}{3}$-Weg W einer Äquivalenz $W \underset{\varepsilon}{\equiv} \alpha_1 W_1 + \alpha_2 W_2 + \ldots + \alpha_s W_s$ genügt.*

---

[13]) Hausdorff, Grundzüge, S. 311.

[14]) Hausdorff, a. a. O. S. 314, V.

(4″) *Ist o ein beliebiger Punkt einer kompakten abgeschlossenen Menge M, so gibt es zu einem vorgegebenen* $\varepsilon > 0$ *eine endliche Anzahl s von Fundamentalfolgen* $F_1, F_2, \ldots, F_s$ *von Wegen, die alle von o nach o führen, so daß jede Fundamentalfolge von Wegen, die in M von o nach o führen, einer Äquivalenz* $F \equiv \alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2 + \ldots + \alpha_s F_s$ *genügt.*

Nun können wir leicht zeigen;

(2′) *Jede Zusammenhangs-, Homologie- oder Fundamentalgruppe einer kompakten abgeschlossenen Menge hat eine kompakte abgeschlossene Basis. Diese kann insbesondere als eine Nullfolge angenommen werden.*

Es sei also $\mathfrak{G}$ eine solche Gruppe. Dann gibt es nach (4), (4′), (4″) zu jedem ε_1 eine endliche ε_1-Basis von Elementen der Gruppe, d. h. von Fundamentalfolgen $F_1, F_2, \ldots, F_{n_1}$, so daß jedes Element F von $\mathfrak{G}$ mit einer Linearkombination der F_i $(1 \leqq i \leqq n_1)$ ε_1-homolog ist. Nun sei $\{F_1^*, F_2^*, \ldots, F_{n_2}^*\}$ eine ε_2-Basis von $\mathfrak{G}$. Zu jedem F_i^* $(1 \leqq i \leqq n_2)$ gibt es ein $F_i^0 = \alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2 + \ldots + \alpha_{n_1} F_{n_1} \underset{\varepsilon_1}{\sim} F_i^*$; bezeichnen wir daher $F_i^0 - F_i^*$ für $n_1 < i \leqq n_2$ mit F_i, so ist $\{F_1, F_2, \ldots, F_{n_2}\}$ eine ε_2-Basis von $\mathfrak{G}$. So fahren wir für eine Nullfolge ε_i fort und erhalten eine Folge $\{F_1, F_2, \ldots, F_{n_1}, F_{n_1+1}, \ldots, F_{n_2}, \ldots, F_{n_3}, \ldots\}$, so daß $\{F_1, F_2, \ldots, F_{n_k}\}$ eine ε_k-Basis von $\mathfrak{G}$ ist und außerdem $F_i \underset{\varepsilon_{k-1}}{\sim} 0$ ist für $n_{k-1} < i \leqq n_k$.[15]) Nun können wir jedes Element von $\mathfrak{G}$ durch eine unendliche Reihe $\alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2 + \ldots$ darstellen. Die Gesamtheit der F_i hat eine einzige Häufungsstelle, nämlich 0. Rechnen wir auch 0 zur Basis, so wird diese abgeschlossen kompakt.

Ein einfaches Beispiel einer solchen Basis ist folgendes. Wir teilen das Einheitsquadrat in neun gleiche Teilquadrate und lassen das mittlere ohne seinen Rand weg, aus jedem der übrigbleibenden Teilquadrate wieder das mittlere Neuntel ohne Rand usw. Dadurch erhalten wir die bekannte Universalkurve U der Ebene von Sierpiński[16]). $U_1, U_2, U_3 \ldots$ seien der Reihe nach die Umfänge der herausgeschnittenen Quadrate. Wir ersetzen zunächst jedes U_i durch eine Fundamentalfolge von eindimensionalen Zyklen $\{Z_{i1}, Z_{i2}, \ldots\} = F_i$, von denen jeder aus U_i durch Unterteilung hervorgeht. Dann ist $\{F_1, F_2, \ldots\}$ eine Basis im Sinne von (2′), und zwar für die Zusammenhangsgruppe erster Dimension, wenn wir die U_i nicht orientiert, für die Homologiegruppe erster Dimension, wenn wir die U_i orientiert annehmen.

Die kleinstmögliche Anzahl von Elementen, welche eine Basis von $\mathfrak{G}$ außer der 0 haben kann, heiße die *Vielfachheit von* $\mathfrak{G}$. Sie ist endlich

---

[15]) Es ließe sich auch leicht erreichen, daß die F_i für $0 < i \leqq n_k$ voneinander für jedes k ε_k-unabhängig sind.

[16]) Compt. Rend. 162 (1916), S. 629.

oder abzählbar unendlich und ein Ersatz für die in Komplexen definierten Zusammenhangs-, (bzw.) Bettischen Zahlen[17]),

Man kann aber auch ohne Verwendung von Fundamentalfolgen von Zyklen derartige Zahlen in folgender Weise erklären:

Wir sagen, die kompakte abgeschlossene Menge M habe eine *p-fache k-dimensionale* (*nicht orientierte* bzw. *orientierte*) *Zyklose*, wenn es zu jedem hinreichend kleinen $\varepsilon > 0$ ein $\delta_\varepsilon > 0$ gibt, so daß für $\delta < \delta_\varepsilon$ in M genau p linear ε-unabhängige k-dimensionale (nicht orientierte bzw. orientierte) δ-Zykel vorkommen. Gibt es dieses p nicht, dann sei $\aleph_0$ als Vielfachheit erklärt[18]).

Die Vielfachheit der nicht orientierten Zyklosis ist gleich der Vielfachheit der Zusammenhangsgruppe derselben Dimension.

Denn es sei p die Vielfachheit der betreffenden Zyklose, q die der zugehörigen Zusammenhangsgruppe. Dann gibt es zu jedem hinreichend kleinen $\varepsilon > 0$ ein $\delta_\varepsilon > 0$, so daß für $\delta < \delta_\varepsilon$ genau $P = 2^p$ untereinander paarweise ε-verschiedene δ-Zykel (einschließlich der mit 0 ε-homologen δ-Zykel) in M vorkommen. In gleicher Weise hat die Zusammenhangsgruppe $Q = 2^q$ verschiedene Elemente. Sind Q miteinander nicht homologe Fundamentalfolgen gegeben, so haben irgend zwei von ihnen, F_i, F_k, einen Abstand d_{ik}. Ist $\varepsilon < d_{ik}$ und n hinreichend groß, so haben die n-ten Zykel in F_i und F_k eine beliebig kleine Kantenlänge und sind nicht ε-homolog; d. h. es ist $P \geqq Q$. Nun sei andererseits $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \ldots$, und $\lim \varepsilon_n = 0$. Zu jedem ε_i gebe es ein δ_i, so daß für $\delta < \delta_i$ genau P paarweise ε_i-verschiedene δ-Zykel $A_{i1}, A_{i2}, \ldots, A_{iP}$ bestehen; wir können annehmen, daß $\delta_i \geqq \delta_k$ für $i < k$ ist. Da also A_{k1} auch ein δ-Zykel ist, muß es mit genau einem A_{il}, etwa A_{i1}, ε_i-homolog sein. Andererseits können keine zwei Zykel A_{kj_1} und A_{kj_2} mit einem Zykel A_{ij} ε_i-homolog sein, weil es sonst noch mindestens einen δ_k-Zykel $A_{k,P+1}$ geben müßte, der mit keinem der bisherigen A_{kj} ε_i-homolog, d. h. erst recht nicht ε_k-homolog wäre. Die A_{ij} und die A_{kj} sind einander also so eineindeutig zugeordnet, daß zugeordnete miteinander ε_i-homolog sind, nicht zugeordnete nicht. Ist die Zuordnung etwa durch dasselbe j gegeben, so sind

---

[17]) Wollte man genaue Analoga zu Poincaré's Bettischen Zahlen und den Zusammenhangszahlen von Veblen und Alexander haben, so müßte man überall noch 1 addieren. Wir folgen aber in der Zählung lieber Schläfli, Klein, Dyck [vgl. die Zitate bei W. Dyck, Math. Ann. **32** (1888), S. 483] und G. Mannoury, Nieuw Archief voor Wiskunde (2) **3** (1898), S. 126—152.

[18]) Diese Begriffsbildung ist analog zu der von Brouwer a. a. O. eingeführten Basis der Zyklosis, welche sich in derselben Weise auf die Fundamentalgruppe bezieht, wie die oben definierten Vielfachheiten auf die Zusammenhangs- und Homologiegruppen.

$\{A_{1j}, A_{2j}, A_{3j}, \ldots\}$ entsprechend den P-Werten von j P untereinander nicht homologe Fundamentalfolgen; d. h. $Q \geqq P$.

Daß für die *orientierten* Zykel der entsprechende Satz nicht gilt, sieht man an dem gelegentlich der Einführung der Fundamentalgruppe gegebenen Beispiel K. Obwohl die erste Homologiegruppe von K nur das Einheitselement enthält, d. h. nullfach ist, hat K doch eine einfache eindimensionale Zyklose [19]).

III. Abbildungssätze.

Unsere weiteren Betrachtungen stützen sich auf den folgenden Doppelsatz:

(5), (5′) *Ist die kompakte abgeschlosseue Menge K auf eine andere $\mathfrak{K}$ eindeutig stetig so abgebildet, daß das Gesamtbild jedes Punktes y von $\mathfrak{K}$ für $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ eine 0-fache k-dimensionale, nicht orientierte bzw. orientierte Zyklose hat, dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ und $\varepsilon' > 0$ ein $\delta > 0$, so daß jeder in $\mathfrak{K}$ liegende n-dimensionale nicht orientierte bzw. orientierte δ-Zyklus $\mathfrak{Z}$ durch ε-Abänderungen innerhalb $\mathfrak{K}$ in einen n-dimensionalen ε-Zyklus übergeführt werden kann, der das Bild (mindestens) eines in K liegenden nicht orientierten bzw. orientierten n-dimensionalen ε'-Zyklus ist.*

Wir führen den Beweis zunächst für (5), d. h. für nicht orientierte Zykel.

Vorerst brauchen nicht einmal *zwei* nahe beisammen liegende Punkte von $\mathfrak{K}$ Urbilder zu haben, die auch nahe beisammen liegen. Es gilt aber der folgende Hilfssatz:

Ist die kompakte abgeschlossene Menge K eindeutig stetig auf $\mathfrak{K}$ abgebildet, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ und $\varepsilon' > 0$ ein $\delta > 0$, derart, daß zu jeder Menge $\mathfrak{K}_1 \leqq \mathfrak{K}$ von einem Durchmesser $< \delta$ ein Punkt y_0 besteht, so daß jeder Punkt x von K, dessen Bild in $\mathfrak{K}_1$ liegt, vom Gesamturbild Y_0 von y_0 einen Abstand $< \varepsilon$ hat und außerdem y_0 von jedem Punkt von $\mathfrak{K}_1$ weniger als ε' entfernt ist.

Wir zeigen zunächst, daß es den Punkt y_0 gibt, wenn er nicht an die durch ε' auferlegte Bedingung gebunden ist.

Angenommen, das wäre nicht richtig. Dann gäbe es ein $\varepsilon > 0$ und zu jedem n $(= 1, 2, 3, \ldots)$ eine Menge $\mathfrak{K}_n$ von einem Durchmesser $< \frac{1}{n}$, zu der kein Punkt y_0 bestünde, für welchen jeder Punkt x von K, dessen Bild in $\mathfrak{K}_1$ liegt, von Y_0 einen Abstand $< \varepsilon$ hätte. Dann können wir aus

---

[19]) Dasselbe Beispiel beantwortet ebenso die analoge Frage bezüglich der Vielfachheit der Fundamentalgruppe und der Vielfachheit der Brouwerschen Basis der Zyklosis in negativem Sinn.

der Folge der $\mathfrak{K}_n$ eine konvergente Teilfolge auswählen: $\mathfrak{K}_{n_1}, \mathfrak{K}_{n_2}, \ldots$. Sie konvergiert, weil die Durchmesser der $\mathfrak{K}_{n_i}$ gegen Null konvergieren, gegen einen Punkt y_ω. Wegen der Kompaktheit von K und der Stetigkeit der Abbildung hat aber für hinreichend großes k jeder Punkt des Gesamtbildes[20]) von $\mathfrak{K}_{n_k}$ eine Entfernung von Y_ω, die $< \varepsilon$ ist, entgegen der Annahme. Also gibt es den behaupteten Punkt y_0, so daß jeder Punkt des Gesamturbildes von $\mathfrak{K}_1$ einen Abstand $< \varepsilon$ von Y_0 hat. Ist dann δ und damit ε hinreichend klein, so ist wegen der Stetigkeit der Abbildung auch $\overline{y\,y_0} < \varepsilon'$ für jeden Punkt y von $\mathfrak{K}_1$.

Nun zum Beweis von (5).

Ist $\delta = \varepsilon_0$ hinreichend klein, so kann ich für beliebig klein vorgegebenes ε_1' zu jeder Kante $[y_i y_k]^1$ von $\mathfrak{Z}$ einen Punkt y_{ik} in $\mathfrak{K}$ wählen, so daß jeder Punkt von $Y_i + Y_k$ einen Abstand $< \varepsilon_1'$ von Y_{ik} hat und y_{ik} von jedem der beiden Punkte y_i, y_k einen Abstand kleiner als ein beliebig vorgegebenes ε_1 hat. Sind ε_0 und ε_1 hinreichend klein, so kann ich für beliebig kleines ε_2 zu jeder zweidimensionalen Seite $[y_i y_k y_l]^2$ von $\mathfrak{Z}$ einen Punkt y_{ikl} in $\mathfrak{K}$ wählen, so daß jeder Punkt der Menge $Y_i + Y_k + Y_l + Y_{kl} + Y_{li} + Y_{ik}$ einen Abstand $< \varepsilon_1'$ von Y_{ikl} hat und y_{ikl} von jedem der Punkte $y_i, y_k, y_l, y_{kl}, y_{li}, y_{ik}$ weniger als ε_2 entfernt ist. Sind $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ hinreichend klein, so kann ich zu jeder dreidimensionalen Seite $[y_{i_1} y_{i_2} y_{i_3} y_{i_4}]^3$ von $\mathfrak{Z}$ einen Punkt $y_{i_1 i_2 i_3 i_4}$ in $\mathfrak{K}$ annehmen, so daß jeder Punkt von $\sum Y_{i_r} + \sum Y_{i_r i_s} + \sum Y_{i_r i_s i_t}$ $(r, s, t = 1, 2, 3, 4)$ von $Y_{i_1 i_2 i_3 i_4}$ einen Abstand $< \varepsilon_1'$ hat und $y_{i_1 i_2 i_3 i_4}$ von jedem der Punkte $y_{i_r}, y_{i_r i_s}, y_{i_r i_s i_t}$ weniger als ε_3 entfernt ist. Und so fahren wir fort, bis wir schließlich jeder n-dimensionalen Seite $[y_{i_1} y_{i_2} \ldots y_{i_{n+1}}]^n$ von $\mathfrak{Z}$ einen Punkt $y_{i_1, i_2, \ldots, i_{n+1}}$ von $\mathfrak{K}$ zuordnen, der die analogen Eigenschaften hat. Die n-dimensionalen Simplizes $[y_{i_1}, y_{i_1 i_2}, y_{i_1 i_2 i_3}, \ldots, y_{i_1 i_2 \ldots i_{n+1}}]^n$ bilden[21]) nun einen n-dimensionalen Zykel $\mathfrak{Z}_1$, der aus $\mathfrak{Z}$ durch ε_1-, ε_2-, $\ldots$, ε_n-Abänderungen entstanden ist, wobei für hinreichend kleines δ $\varepsilon_1 < \varepsilon$, $\varepsilon_2 < \varepsilon, \ldots, \varepsilon_n < \varepsilon$ gemacht werden kann. Zum Beweis von (5) haben wir nur noch zu zeigen, daß $\mathfrak{Z}_1$ Bild eines ε'-Zyklus Z in K ist, sobald δ hinreichend klein ist.

Dazu wählen wir in jedem Y_i einen Punkt x_i. In jedem Y_{ik} wählen wir einen Punkt x_{ik}, der von x_i einen Abstand $< \varepsilon_1'$ hat, und einen Punkt x_{ki}, der von x_k einen Abstand $< \varepsilon_1'$ hat. Weil Y_{ik} eine 0-fache 0-dimensionale Zyklose hat, d. h. zusammenhängend ist, gibt es in Y_{ik} einen homogen eindimensionalen ε_1'-Komplex K_{ik}^{*1}, dessen Rand das Punktepaar $[x_{ik}, x_{ki}]^0$ ist. Zusammen mit den Strecken $[x_i x_{ik}]^1$ und

20) Gesamturbild einer Menge M = Menge aller Urbilder aller Punkte von M.

21) Dabei gilt natürlich $y_{ik} = y_{ki}$, $y_{ikl} = y_{kil} = y_{kli} = \ldots$.

$[x_k x_{ki}]^1$ ergibt er einen homogen eindimensionalen ε_1'-Komplex K_{ik}^1, dessen Rand das Punktepaar $[x_i x_k]^0$ ist. Ist $[y_i y_k y_l]^2$ ein zweidimensionaler Simplex von $\mathfrak{Z}$, so ist $K_{kl}^1 + K_{li}^1 + K_{ik}^1$ ein eindimensionaler ε_1'-Zyklus Z_{ikl}^1. Zu jedem Punkt x von Z_{ikl}^1 wählen wir in Y_{ikl} einen Punkt x^*, der von x einen Abstand $< \varepsilon_1'$ hat, und erhalten einen Zyklus Z_{ikl}^{*1}, in dem je zwei benachbarte Punkte einen Abstand $< 3\varepsilon_1'$ haben. Weil Y_{ikl} eine 0-fache eindimensionale Zyklose hat, ist Z_{ikl}^{*1}, wenn nur ε_1' hinreichend klein ist, für beliebig kleines ε_2' Rand eines in Y_{ikl} liegenden homogenen zweidimensionalen ε_2-Komplexes K_{ikl}^{*2}. Fügen wir zu K_{ikl}^{*2} noch den durch Z_{ikl}^{*1}, Z_{ikl}^1 und die Strecken $[x x']^1$ bestimmten zweidimensionalen Komplex, den wir uns simplizial zerlegt denken, so erhalten wir einen homogen zweidimensionalen ε_2'-Komplex K_{ikl}^2, dessen Rand Z_{ikl}^1 ist. Nun seien y_i, y_k, y_l, y_m vier Ecken eines dreidimensionalen Simplex von $\mathfrak{Z}$. Die Vereinigung der vier Komplexe $K_{klm}^2 + K_{lmi}^2 + K_{mik}^2 + K_{ikl}^2$ ist ein zweidimensionaler ε_2'-Zyklus Z_{iklm}^2. Zu jeder seiner Ecken x wählen wir in Y_{iklm} einen Punkt x^*, so daß $\overline{x x^*} < \varepsilon_1'$ ist, und erhalten einen zweidimensionalen Zyklus Z_{iklm}^{*2}, dessen Kantenlänge $< \varepsilon_2' + 2\varepsilon_1'$ ist. Weil Y_{iklm} eine nullfache zweidimensionale Zyklose hat, gibt es, sobald nur $\varepsilon_2' + 2\varepsilon_1'$ hinreichend klein ist, für beliebig vorgegebenes ε_3' einen homogen dreidimensionalen ε_3'-Komplex K_{iklm}^{*3}, dessen Rand Z_{iklm}^{*2} ist. Fügen wir zu K_{iklm}^{*3} noch den durch Z_{iklm}^{*2}, Z_{iklm}^2 und die Verbindungsstrecken $[x x^*]^1$ gegebenen dreidimensionalen Komplex hinzu, so erhalten wir einen homogen dreidimensionalen ε_3'-Komplex K_{iklm}^3, dessen Rand Z_{iklm}^2 ist. Damit fahren wir bis zu den n-dimensionalen Seiten von $\mathfrak{Z}$ fort. $y_{i_1}, y_{i_2}, \ldots, y_{i_{n+1}}$ seien die Ecken einer beliebigen unter ihnen. Beim $(n-1)$-ten Schritt haben wir schon die $(n+1)$ homogen $(n-1)$-dimensionalen ε_{n-1}'-Komplexe $K_{i_2 i_3 \ldots i_{n+1}}^{n-1}, K_{i_1 i_3 \ldots i_{n+1}}, \ldots$ konstruiert, deren Vereinigung der $(n-1)$-dimensionale Zyklus $Z_{i_1 i_2 \ldots i_{n+1}}^{n-1}$ ist. Dabei ist $Z_{i_1 i_2 \ldots i_{n+1}}^{n-1}$ Rand des homogen n-dimensionalen ε_n'-Komplexes $K_{i_1 i_2 \ldots i_{n+1}}^n$.

Nun ist $\mathfrak{Z}$ ein n-dimensionaler *Zyklus*, d. h. jede $(n-1)$-dimensionale Seite ist in den Rändern einer geraden Anzahl seiner n-dimensionalen Seiten enthalten. Da die Zuordnung zwischen den $(n-1)$-dimensionalen Seiten von $\mathfrak{Z}$ und den Komplexen $K_{ikl\ldots}^{n-1}$ eineindeutig ist[22]), ebenso die zwischen den n-dimensionalen Seiten von $\mathfrak{Z}$ und den Komplexen $K_{pqr\ldots}^n$, und außerdem K_{ikl}^{n-1} dem Rand von $K_{pqr\ldots}^n$ dann und nur dann angehört, wenn dies für die entsprechenden Seiten von $\mathfrak{Z}$ *zutrifft*, ist auch jedes

[22]) Dabei ist natürlich jedes $K_{ikl\ldots}^{n-1} = K_{jpq\ldots}^{n-1} = \ldots$ in ebenso vielen Exemplaren zu denken, als es zufolge der Konstruktion verschiedene Bezeichnungen hat.

$K_{ikl\ldots}^{n-1}$ in den Rändern einer geraden Anzahl von $K_{pqr\ldots}^n$ enthalten, d. h. $\sum K_{pqr\ldots}^n = Z$ ist ein n-dimensionaler Zyklus. Sein Bild in der zugrunde gelegten Abbildung von K auf $\mathfrak{K}$ ist $\mathfrak{Z}_1$. Dabei haben die Kanten von Z Längen bzw. $< \varepsilon_1'$, $< \varepsilon_2'$, ..., $< \varepsilon_n'$, d. h. kleiner als das vorgegebene ε', sobald δ hinreichend klein ist. Da Z natürlich ganz in K liegt, ist der Beweis von (5) beendigt.

Der von (5′) ist mit ihm fast gleichlautend. Man hat nur dem Komplex $\mathfrak{Z}_1$ jene Orientierung zu geben, die ihm als einer Unterteilung von $\mathfrak{Z}$ zukommt, und die Ausfüllung der Löcher, in der der Beweis zur Hauptsache besteht, mit Hilfe der Voraussetzung, daß nun die orientierten Zyklosen der Gesamturbilder der Punkte von $\mathfrak{K}$ nullfach sind, durch orientierte Komplexe vorzunehmen, deren Orientierung von $\mathfrak{Z}$ übernommen wird.

Aus (5) beweisen wir leicht den analogen Satz über Fundamentalfolgen.

(6) *Unter den Voraussetzungen des Satzes* (5) *gibt es zu jeder in* $\mathfrak{K}$ *liegenden Fundamentalfolge* $\mathfrak{F}$ *von n-dimensionalen nicht orientierten Zyklen mindestens eine Fundamentalfolge F von n-dimensionalen Zyklen in K, deren Bild mit* $\mathfrak{F}$ *homolog ist* (*im Sinn der Zusammenhangsgruppe*).

Es sei $\varepsilon_i > 0$, $\varepsilon_i' > 0$, $\lim \varepsilon_i = 0$, $\lim \varepsilon_i' = 0$. Wir bestimmen zu jedem $i = 1, 2, 3, \ldots$ das δ_i nach Satz (5). $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \ldots$ sei eine Teilfolge von $\mathfrak{F}$, so daß für jedes i $\mathfrak{C}_i$ ein δ_i-Zyklus ist. Dann gibt es nach (5) in K einen ε_i'-Zyklus B_i, dessen Bild $\mathfrak{B}_i \underset{\varepsilon_i}{\sim} \mathfrak{C}_i$ ist. Wegen (3) gibt es nur endlich viele unter den B_i, die paarweise nicht $\frac{1}{2}$-homolog sind. Der erste Zykel B_i mit dem unendlich viele andere B_i $\frac{1}{2}$-homolog sind, heiße D_1. Der erste Zykel unter den mit D_1 $\frac{1}{2}$-homologen B_i, mit dem unendlich viele dieser (mit D_1 $\frac{1}{2}$-homologen B_i) $\frac{1}{4}$-homolog sind, heiße D_2 usw. Die Folge $D_1, D_2, \ldots$ ist eine der in (6) behaupteten Fundamentalfolgen F.

Da umgekehrt das stetige Bild jeder Fundamentalfolge eine Fundamentalfolge ist, folgt aus (6) unmittelbar:

(7) *Unter den Voraussetzungen von* (5) *ist die n-dimensionale Zusammenhangsgruppe* $\mathfrak{Z}^{(n)}$ *von* $\mathfrak{K}$ *das Bild der n-dimensionalen Zusammenhangsgruppe* $Z^{(n)}$ *von K.*

Weil dabei nur Elemente von $Z^{(n)}$ identifiziert werden können, gilt weiter:

(8) *Unter den Voraussetzungen von* (5) *ist* $\mathfrak{Z}^{(n)}$ *ein Teiler von* $Z^{(n)}$.

Daraus folgt:

(9) *Unter den Voraussetzungen von* (5) *ist die n-te Zusammenhangszahl von* $\mathfrak{K}$ *nicht größer als die von K.*[23])

---

[23]) Die in Anm. 1 erwähnten beiden Sätze sind eindimensionale Analoga von (9).

Es bleibe dahingestellt, ob zu den Sätzen (6), (7), (8), (9), in deren Beweis (2) eingeht, die analogen über orientierte Zykel bezüglich der n-ten Homologiegruppe gelten.

Dagegen können wir, immer unter den Voraussetzungen von (5), bzw. (5′), eine vollständige Analogie für die Gruppen niedrigerer als der n-ten Dimension herstellen.

Natürlich gelten (5), (6), (7), (8), (9) auch für die k-te Zusammenhangsgruppe, solange $k \leqq n$ ist. Wir wollen nun aber außerdem, und zwar sowohl für nicht orientierte Zykel, wie für orientierte, zeigen:

(5b) *Unter den Voraussetzungen von* (5), *bzw.* (5′) *gibt es für* $k < n$ *zu jedem* $\varepsilon > 0$ *und* $\varepsilon' > 0$ *ein* $\delta > 0$, *so daß jeder in* $\mathfrak{K}$ *liegende mit* 0 δ*-homologe* k*-dimensionale Zyklus mit einem* k*-dimensionalen Zyklus in* $\mathfrak{K}$ ε*-homolog ist, der das Bild eines in* K *mit* 0 ε'*-homologen* k*-dimensionalen Zyklus ist.*

Es sei nämlich $\mathfrak{C}$ der in $\mathfrak{K}$ gegebene (nicht orientierte bzw. orientierte) Zyklus und $\mathfrak{P}$ eine $(k+1)$-dimensionale δ-Kette in $\mathfrak{K}$, deren Rand $\mathfrak{C}$ ist. Da $k+1 \leqq n$ ist, kann ich $\mathfrak{P}$, genau wie im Beweis von (5) und (5′) den Zykel $\mathfrak{Z}$, unterteilen und den in (5b) behaupteten, mit $\mathfrak{C}$ ε-homologen Zyklus finden.

(10) *Unter den Voraussetzungen von* (5), *bzw.* (5′) *ist jede Folge* F *in* K *von* k*-dimensionalen (nicht orientierten, bzw. orientierten) Zyklen* $(k < n)$ *mit gegen* 0 *konvergierenden Kantenlängen, deren Bild in* $\mathfrak{K}$ *eine Nullfolge ist, selbst eine Nullfolge.*

Es sei $\varepsilon_i > 0$, $\varepsilon_i' > 0$ und δ_i gemäß (5), bzw. (5′) bestimmt. Ferner sei $F = \{C_1, C_2, \ldots\}$ und $\mathfrak{F} = \{\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \ldots\}$. Für hinreichend großes m_i ist $C_{m_i} \underset{\delta_i}{\sim} 0$. Wir wählen außerdem m_i so groß, daß die Kantenlänge von C_{m_i} kleiner als ε_i' ist. Nun sei $\mathfrak{P}_{m_i}$ eine $(k+1)$-dimensionale δ_i-Kette, deren Rand $\mathfrak{C}_{m_i}$ ist. Konstruieren wir wie im Beweis von (5) zu $\mathfrak{P}_{m_i}$ ein Urbild P_{m_i} mit der Kantenlänge $< \varepsilon_i'$, so können wir unter den Punkten $x_1, x_2, \ldots$, deren Wahl innerhalb der Y_i ja beliebig war, die Punkte von C_{m_i} verwenden. Da C_{m_i} schon ein ε_i'-Zyklus ist, können wir, wenn $y_p, y_q, y_r, \ldots$ Ecken einer Seite von $\mathfrak{C}_{m_i}$ sind, die Zwischenschaltung von Punkten $y_{pq}, y_{pqr}, \ldots$ unterlassen. Dadurch erhalten wir C_{m_i} selbst als Rand einer in K liegenden homogen k-dimensionalen ε_i'-Komplexes; d. h. es ist $C_{m_i} \underset{\varepsilon_i'}{\sim} 0$.

Wegen (5b) können wir aber zu jeder Fundamentalfolge $\mathfrak{F}$ in $\mathfrak{K}$ von k-dimensionalen Zyklen eine andere mit ihr homologe Fundamentalfolge $\mathfrak{F}^*$ finden, welche Bild einer Folge F^* von in K liegenden k-dimensionalen Zyklen mit gegen 0 konvergierender Kantenlänge ist. Es sei $\{C_1, C_2, \ldots\}$ eine beliebige Teilfolge von F^*. Ihr Bild in $\mathfrak{K}$ sei

$\{C_1, C_2, \ldots\}$. Nun ist $\{\mathfrak{C}_1 - \mathfrak{C}_2, \mathfrak{C}_2 - \mathfrak{C}_3, \ldots\}$ eine Nullfolge, also wegen (10) auch $\{C_1 - C_2, C_2 - C_3, \ldots\}$. Da $\{C_1, C_2, \ldots\}$ aber eine beliebige Teilfolge von F^* war, ist F^* eine Fundamentalfolge.

Wir können also behaupten:

(7′b) *Unter den Voraussetzungen von* (5′) *ist für $k < n$ die k-te Homologiegruppe von $\mathfrak{K}$ das Bild der k-ten Homologiegruppe von K.*

Da nun wegen (10) zwei Fundamentalfolgen F_1, F_2 von k-dimensionalen Zyklen in K, deren Bilder $\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2$ miteinander homolog sind, selbst homolog sind, können wir schließlich sagen:

(8b) *Unter den Voraussetzungen von* (5), *bzw.* (5′) *ist für $k < n$ die k-te Zusammenhangsgruppe bzw. die k-te Homologiegruppe von $\mathfrak{K}$ mit der von K identisch.*

Für die Vielfachheit der Zyklosis lassen sich die nachfolgenden zu (8b) und (9) analogen Sätze (8c) und (9c) auf Grund von (5), bzw. (5′) ohne Verwendung von (2) und darum für orientierte wie nicht orientierte Zykel zugleich nachweisen.

(8c, 9c) *Unter den Voraussetzungen von* (5), *bzw.* (5′) *ist die Vielfachheit der k-dimensionalen nicht orientierten, bzw. orientierten Zyklosis von $\mathfrak{K}$ für $k < n$ genau gleich, für $k = n$ höchstens gleich der von K.*

Es habe also K eine m-fache n-dimensionale Zyklose. $\varepsilon > 0$ sei beliebig gegeben. Wir nehmen $\varepsilon_1 > 0$ so an, daß zwei Punkten von K, deren Abstand $< \varepsilon_1$ ist, in $\mathfrak{K}$ immer zwei (möglicherweise zusammenfallende) Punkte mit einem Abstand $< \varepsilon$ entsprechen. Ist ε_1 außerdem noch hinreichend klein, so gibt es ein $\varepsilon' > 0$, so daß in K genau m voneinander linear ε_1-unabhängige ε'-Zykel bestehen. Wir bestimmen nun δ nach (5), bzw. (5′). Zu irgend r δ-Zyklen $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2, \ldots, \mathfrak{Z}_r$ in $\mathfrak{K}$ gibt es laut (5), bzw. (5′) r Zykel $\mathfrak{Z}_1^*, \mathfrak{Z}_2^*, \ldots, \mathfrak{Z}_r^*$, welche mit $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2, \ldots, \mathfrak{Z}_r$ ε-homolog sind und Bilder von in K liegenden n-dimensionalen ε'-Zyklen sind. Da in K nur m linear ε_1-unabhängige ε'-Zykel vorkommen, sind auch höchstens m von den Zyklen $\mathfrak{Z}_i^*$ und damit von den Zyklen $\mathfrak{Z}_i$ linear ε-unabhängig.

Nun habe für $k < n$ $\mathfrak{K}$ eine r-fache k-dimensionale Zyklose. Wir wollen zeigen, daß auch K keine größere haben kann.

$\varepsilon > 0$, $\varepsilon' > 0$ seien beliebig vorgegeben und δ nach (5), bzw. (5′) gewählt. In K seien nun $s > r$ k-dimensionale η-Zykel $Z_1, Z_2, \ldots, Z_s$ gegeben, wo $\eta < \varepsilon'$ und so klein sei, daß zwischen den Bildern $\mathfrak{Z}_1, \mathfrak{Z}_2, \ldots, \mathfrak{Z}_s$ eine δ-Homologie $\mathfrak{Z} = \alpha_1 \mathfrak{Z}_1 + \alpha_2 \mathfrak{Z}_2 + \ldots + \alpha_s \mathfrak{Z}_s \underset{\delta}{\sim} 0$ besteht. $\mathfrak{P}$ sei eine $(k+1)$-dimensionale δ-Kette in $\mathfrak{K}$, deren Rand $\mathfrak{Z}$ ist. Durch ε-Unterteilungen von $\mathfrak{P}$ kann ich eine $(k+1)$-dimensionale in $\mathfrak{K}$ liegende ε-Kette $\mathfrak{P}^*$ finden. Dabei kann ich als die im Beweis von (5) auftretenden

Punkte $x_1, x_2, \ldots$ die Punkte von $Z = \alpha_1 Z_1 + \alpha_2 Z_2 + \ldots + \alpha_s Z_s$ wählen. Da außerdem dieser Zykel schon eine Kantenlänge $< \varepsilon'$ hat, kann ich bei der Konstruktion von $\mathfrak{P}^*$ die Unterteilung von $\mathfrak{Z}$ unterlassen; d. h. $\mathfrak{Z}$ ist auch Rand von $\mathfrak{P}^*$. Als Urbild P^* von $\mathfrak{P}^*$ ergibt sich bei dieser Konstruktion eine $(k+1)$-dimensionale ε'-Kette, deren Rand Z ist. Wenn also η hinlänglich klein ist, so sind irgend $s > r$ k-dimensionale η-Zykel ε'-abhängig; d. h. die Basis der k-dimensionalen Zyklose von K ist nicht größer als r.[24])[25])

IV. Mehr-mehr-deutige Abbildungen.

Wir können aus (8b) und (8c) erheblich allgemeinere und symmetrischere Sätze über mehr-mehr-deutige Abbildungen ableiten, indem wir diese *uniformisieren.*

$\mathfrak{R}$ sei eine beliebige Abbildung einer Menge A auf eine Menge B. P sei die Menge aller geordneten Paare (ξ, η), deren ξ in A, deren η in B liegt, also die Produktmenge aus A und B. ξ und η heißen die Projektionen von (ξ, η) nach A und B.[26]) Die Menge aller Paare (x, y), welche in der Abbildung einander entsprechen $(x \mathfrak{R} y)$, ist eine Teilmenge der Produktmenge und heiße R. Die Projektionen von R auf A und B sind (mehr-) eindeutige Abbildungen $\mathfrak{R}_A$, $\mathfrak{R}_B$ und es gilt $\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_A^{-1} \cdot \mathfrak{R}_B$.[27]) $\mathfrak{R}_A^{-1}$ und $\mathfrak{R}_B$ mögen die uniformisierenden Komponenten von $\mathfrak{R}$ heißen.

Sind A und B topologische Räume, so bilden die Produkte der Umgebungen in A mit denen in B ein Umgebungssystem des Produktraumes[28]). Dann sind die Projektionen irgendwelcher Mengen aus P auf A und B nicht nur eindeutig sondern auch stetig.

Wir nennen nun eine mehr-mehr-deutige Abbildung einer Menge A

---

[24]) Die analoge Behandlung der Fundamentalgruppe verschieben wir auf eine spätere Gelegenheit.

[25]) Die hier abgeleiteten Abbildungssätze lassen sich ebensogut als Sätze über oberhalb stetige Zerlegungen von kompakten abgeschlossenen Mengen auffassen. Über diesen Begriff, der von R. L. Moore [Proc. Nat. Ac. **10** (1924), S. 356—360, Trans. Am. Math. Soc. 27 (1925), S. 416—428] und P. Alexandroff [Proc. Amsterdam **28**, Nr. 10, Math. Annalen **96**, S. 555—571] eingeführt worden ist, bzw. unsere Terminologie, vgl. meine oben zitierte Arbeit Amst. Proc. **29**, S. 443.

[26]) Hausdorff, Mengenlehre 1926, S. 102.

[27]) Wir verstehen unter dem (relativen) Produkt $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}$ zweier Relationen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ jene Relation, welche zwischen x und y dann und nur dann besteht, wenn es ein z gibt, für welches $x \mathfrak{A} z$ und $z \mathfrak{B} y$ gilt. Vgl. Whitehead und Russell, Principia mathematica Bd. I, Nr. 34.

[28]) R. E. Root, Am. Journ. Math. **36** (1917), S. 90. Sind A und B metrische Räume, so kann auch der Produktraum in einfachster Weise metrisiert werden. Vgl. Hausdorff, Mengenlehre 1926, S. 102.

auf eine Menge B *stetig*[29]), wenn das Gesamturbild jeder in B abgeschlossenen Menge in A abgeschlossen ist. Ist B kompakt und abgeschlossen, so ist dies damit gleichbedeutend, daß für jede konvergente Folge aus A $x_1, x_2, \ldots$ mit dem Limes x_ω die Gesamtbilder $X_1, X_2, \ldots, X_\omega$ der Beziehung $\overline{\lim}\sup X_i \subseteq X_\omega$ unterliegen.

(11) *Eine Abbildung $\mathfrak{R}$ von A auf B ist dann und nur dann stetig, wenn $\mathfrak{R}_A^{-1}$ stetig ist, d. h. wenn ihre* beiden *uniformisierenden Komponenten stetig sind.*

Denn: $\mathfrak{R}_B$ ist ohnehin stetig. Wenn daher $\mathfrak{R}_A^{-1}$ stetig ist, so auch $\mathfrak{R}_A^{-1} \cdot \mathfrak{R}_B = \mathfrak{R}$. Umgekehrt sei $\mathfrak{R}$ stetig, $x_1, x_2, \ldots, x_\omega$ seien Punkte von A und es gelte $\lim x_i = x_\omega$. Für die Gesamtbilder in B gilt $\overline{\lim}\sup X_i \subseteq X_\omega$. Das Gesamtbild von x_i in R ist die Menge aller Paare (x_i, y_i), für welche $y_i \varepsilon X_i$ gilt, d. i. das Produkt $\{x_i\} \cdot X_i$. Aus $\lim x_i = x_\omega$ und $\overline{\lim}\sup X_i \subseteq X_\omega$ folgt nun $\overline{\lim}\sup(\{x_i\} \cdot X_i) \subseteq \{x_\omega\} \cdot X_\omega$, womit $\mathfrak{R}_A^{-1}$ stetig ist.

Nun können wir behaupten:

(8d) *Ist die kompakte abgeschlossene Menge $\mathfrak{K}$ auf eine kompakte abgeschlossene Menge $\mathfrak{K}$ beiderseits stetig so abgebildet, daß das Gesamtbild jedes Punktes von K und das Gesamturbild jedes Punktes von $\mathfrak{K}$ nullfache nicht orientierte, bzw. orientierte Zyklosen 0-ter, 1-ter, ..., n-ter Dimension haben, dann ist die 0-te, 1-te, ..., n-te Zusammenhangs- bzw. Homologiegruppe von $\mathfrak{K}$ mit der von K identisch.*

Denn auf die beiden uniformisierenden Komponenten der Abbildung kann (8) angewendet werden. Ebenso zeigt man aus (8c):

(8e) *Unter den Voraussetzungen von* (8d) *haben für $k \leqq n$ K und $\mathfrak{K}$ dieselbe Vielfachheit der k-ten nicht orientierten, bzw. orientierten Zyklose.*

Weil nun jede stetige (mehr-mehr-deutige) Abbildung eines kompakten Raumes umkehrbar stetig ist[30]), sind (8d) und (8e) Verallgemeinerungen von (8b) und (8c).

Die Übereinstimmung von K mit $\mathfrak{K}$ in den ersten n Zusammenhangs- und Homologiegruppen reicht nicht aus, um das Bestehen einer den Voraussetzungen von (8d) genügenden Abbildung zu gewährleisten[31]).

---

[29]) Nach W. Hurewicz, Proc. Amsterdam 29 (1926), S. 1014–1017.

[30]) Vgl. Hurewicz, a. a. O., S. 1015, Anm. 1.

[31]) Hierzu vgl. den Auszug aus meinem Vortrag auf der Naturforscherversammlung in Düsseldorf (1926) „Über den höheren Zusammenhang kompakter Räume" (Jhrsber. d. deutsch. Math. Ver. 35, Heft 9—12), wo weitere Invarianten dieser Abbildungen aufgezeigt werden. (Zusatz bei der Korrektur.)

(Eingegangen am 28. 6. 1926.)